

都市聚落系统的形成规律

——递增报酬与幂次法则的计算机与数理仿真

赖世刚^{1,2}, 韩昊英¹, 于如陵³, 柯博晟⁴

(1. 浙江大学土地科学与不动产研究所, 杭州 310029; 2. 台北大学不动产与城乡环境学系, 台北;

3. 昆山科技大学不动产经营系, 台南; 4. 台北大学都市计划研究所, 台北)

摘要: 幂次法则是一个普遍存在于自然科学与社会科学界的现象, 在都市体系中亦可观察到此一现象。过去的文献仅仅对于幂次法则现象进行了观察和解释, 并未能完整地解释其形成的机制。本研究尝试由复杂理论中“递增报酬”的观念来探讨幂次现象的成因, 采用计算机程序来仿真都市聚落体系形成的过程, 并观察递增报酬与幂次现象之关系。该仿真包含了3种不同的区位发展吸引模式, 分别为相邻关系、规模吸引以及同时考虑规模与相邻的混合模式。计算机仿真显示: ① 规模吸引与混合两种模式比相邻吸引模式能够更好地解释都市聚落的成长; ② 依照递增报酬法则而仿真形成的都市聚落, 与幂次现象呈高度相关。随后的数理仿真演算显示, 幂次法则为一统计上的普遍现象, 但在递增报酬等经济因素驱动下的都市聚落体系结构与真实的状况较为吻合。因此我们推测, 递增报酬极可能是形成真实世界幂次现象的机制之一。

关键词: 计算机仿真; 幂次现象; 递增报酬; 都市聚落体系

1 引言

不论古今中外, 在一个国家或地区内, 总是存在着所谓的“都市层级”或“都市体系”, 高阶层的大都市数量稀少, 而存在众多的低阶层小聚落, 大小聚落之间存在的秩序, 仿佛是经过人为精心的安排^[1]。这样的都市聚落的体系究竟是如何形成的呢? 本文企图以计算机以及数理仿真的方式来回答这个问题。

到目前为止, 学界只是对于此种现象与规律进行观察与解释, 基本的理论为等级大小法则 (Rank-Size rule)^[2-4]和幂次法则 (Power law)^[5-6], 对于形成这种现象的幕后机制仍在试图理解之中。一个较为著名的解释模型由 Simon 在 1955 年提出^[7]。他假设都市成长是一次增加一个区块 (lump), 而这个区块的人口可以选择加入现有都市, 或成立一个新的聚落。而该区块成立为新聚落的机率是固定值 π 。而推导出的系数值 $\alpha = 1/(1 - \pi)$ 。但问题是依照实际状况统计出来的 α 值趋近于 1, 因而实际情况的 π 值应接近于零; 但在 π 等于零的情况下, 新都市不会产生, 更谈不上形成所谓的都市体系, 模型将无法运作。因此, Simon 的模型仍未能完整解释幂次法则的成因。

本文的目的便试图突破幂次法则在解释都市系统自我组织现象的盲点。由于都市是一个复杂系统, 本研究尝试由递增报酬概念通过计算机以及数理仿真实验推测幂次法则背后形成的机制。在近些年中, “递增报酬”已经被用来成功地解释诸如城市等复杂系统自组

收稿日期: 2009-07-01; 修订日期: 2010-05-16

基金项目: 国家自然科学基金项目 (50908200; E080201); 教育部留学回国人员启动基金项目 (J20091217)

[Foundation: National Natural Science Foundation of China, No.50908200; No.E080201; The Scientific Research Foundation of the Ministry of Education for Returned Chinese Scholars, No.J20091217]

作者简介: 赖世刚, 男, 教授, 主要从事都市、复杂与规划研究, E-mail:

通讯作者: 韩昊英, 男, 副教授, 主要从事城市规划、土地利用规划与控制等研究, E-mail: hanhaoying@zju.edu.cn

织运作的很多现象，并成为复杂科学的一个基本理论，本研究假定它也会对城市系统幂次现象进行解释。因而，研究的设计也围绕着该假定展开，以“递增报酬”的概念为精神，设计计算机仿真程序以及数理仿真演算，在均质的平面空间上建立符合幂次法则的聚落体系。通过这样的模拟实验，验证“递增报酬”是否为形成幂次法则的推动机制。

2 递增报酬与幂次法则的基本理论

2.1 等级大小法则与幂次法则

1949年 Zipf 提出等级大小法则，以说明都市规模与其等级的相关性^[2]。其关系如下：
$$P_r = P_1/r \tag{1}$$

式中： P_r 代表区内第 r 级城市的人口数； P_1 代表区内最大城市（首位市）的人口数； r 代表有 P_r 人口城市的等级。

这个经由观察归纳所得的关系，经过许多学者在各地加以验证，确实可以相当程度地描述都市体系内的等级关系。

幂次现象是指事物出现的规模与频率间的关系：物体的规模 S 和其出现之次数，呈 $S^{-\alpha}$ 的比例关系，亦即规模大的事物出现的频率低，而规模小的事物出现的频率高，而形成一个个自成组织的体系。幂次法则的实例最为人所称道的首推地震与砂堆实验^[5-6]。地震的发生次数与其释出的能量间符合幂次法则的规律，另外在砂堆实验中，砂堆崩塌的规模与崩塌频率之间，亦存在幂次法则的规则。

我们可以发觉，其实幂次法则亦存在于都市系统中，等级大小法则实际上就体现了都市系统分布的幂次法则。Krugman 曾以美国都市的实际统计资料进行统计分析，将城市依规模大小“排序”，再将“排序”与“规模”皆取对数，发现二者呈现线性的关系，亦即符合幂次法则^[8]。

2.2 递增报酬理论

将“递增报酬”概念引入现代经济学界的首推 Arthur^[9]。“递增报酬”与都市经济学上的“聚集经济”颇有异曲同工之妙。对厂商或生产者而言，外部规模经济是聚集的主要原因，例如某一产业产量之增加，使得对原料的采购可以降低价格，进而使得该产业内的各厂商均可享受较低廉的原料供应。对厂商而言是外部的，对整个行业而言却是内部的，称为地方化经济 (localization economics)。而都市化经济是指当一个都市扩大其规模时，都市内的各行各业均能分享它的好处。例如，只有大城市才能负担的一些高级的建设 (如音乐厅、体育馆) 会使市民受益。

以聚集经济的两个主要成因来看，规模效果和递增报酬有密切的关系，而且在递增报酬中，所谓的“阵营”不见得有空间上的联系，如同一种产品的使用者。也就是说，递增报酬不限于聚集的情况下才发生。但是都市建设的不可分割性则一定要在聚集的情况下才会产生，因此两者仍有相当程度之区别。

就空间的聚集行为而言，Arthur 认为这是一种递增报酬的现象。厂商因为生产条件的考虑都会区域偏好，接着进入的厂商会优先选择于现有厂商的周围，可以减少开发成本获得较多利益，这就是聚集经济效果。利用数学式子可以表示如下^[10]

$$\pi_i + g(N_i) \tag{2}$$

式中： π_i 表示区域 i 提供之地理资源优势， $g(N_i)$ 表示区域 i 内存在 N_i 家厂商时所得到的聚集利益。因此当厂商数增加时，该区域的聚集利益亦随之增加。Arthur 曾通过理论的推导指出，假如聚集利益没有上限 (unbounded)，最终会有区位独占所有产业，但未对最终区位的空间结构加以说明。

3 计算机仿真设计

本研究首先在Krugman和Arthur的理论架构基础上,从递增报酬的观点,设计一个二维空间的计算机仿真实验。仿真实验的逻辑基础是将聚落体系形成的过程视为一随机成长过程。在我们的计算机仿真中,沿用了Arthur的分析架构,把区位的吸引力区分为区位本身的特性与聚集利益两部分。但为了简化模型,专注于探讨递增报酬与幂次法则之关系,将模拟空间设定为一均质平面,不考虑区位本身的特性,区位的吸引力纯粹来自于聚集利益。另外,在Arthur的模型中,区域的数目及区域划分是预设的,而在我们所设计的计算机模型中,聚落的数目是系统内生的,而每个聚落的聚集利益和聚落规模成正比,因此每个聚落就等于是一个小区域。

在这个计算机仿真实验中,将平面空间分为相同规模的方格(grid),每一个方格代表一个细胞(cell),而这个细胞代表一个最小的土地开发单元。这个细胞的概念是由元胞自动机(cellular automata)而来,虽然本文并未用到元胞自动机的理论,只是考虑二维的格子状腹地,但仍然借用细胞这个名词来代表一个最小的土地开发单元。当细胞数目越多时,相对的运算时间会随之增加,但基于统计的观点,大样本将具有较高的可信度,因此本研究参照历年相关的计算机仿真实验,在计算机运算时间能够忍受的程度下,将模拟空间的细胞数大幅提高。本实验设计一个纵横各为200格的方格矩阵,总计为40000个细胞。

细胞的状态只有两种情况:“未发展”与“已发展”。在初始状态下,每个细胞均为未发展状态,然后依照仿真规则,某些未发展细胞会转变成为已发展的状态。在计算机仿真的每一回合中,会有一个已开发细胞进入本区域,选择一个居住区位,被选择的区位将由“未发展”转为“已发展”状态。因此每经过一个回合,“已发展”细胞便增加一个,如此进行2000回合的计算机仿真实验,以观察这些细胞所形成的聚落体系。本文中的计算机仿真共进行了2000回合,主要基于以下考虑:

(1) 当运行两千回合后,已有足够的数据可以观察都市体系的形态,而所需时间亦在可忍受的范围内。

(2) 尽量保持区域内不致于太过拥挤,发展2000回合后,只使用了5%的面积,如此可以尽量减少因为拥挤而导致两个聚落合并的情况,当两个聚落合并为一,会使聚落规模突然暴增,违反本模型设定的每回合增加一个已发展细胞的规则,对仿真的结果将有相当影响。

此外,本模拟实验存在以下的基本假设:

(1) 在本实验中细胞的开发是不可逆的,即一个细胞由为发展状态转为已发展状态后,不可能回复为未发展的状态。在真实世界中,这代表土地开发行为是不可逆的,土地一旦被开发,就不会回复到原先的初始状态。

(2) 初始状态下,区域皆为未发展细胞,之后每增加一回合,便固定新增一个已发展细胞加入区域内,而不论该细胞为系统内生或自外界迁入,因此每回合的已发展细胞增量固定为一,重点是其区位选择于何处。在本研究中,该区位的选择是依据第3节3.2中所述的决策规则而定。

本研究之计算机仿真,是由Microsoft Visual Basic 6.0(简称VB)程序语言为工具,根据蒙地卡罗仿真(Monte Carlo simulation)方法,自行撰写仿真实验之程序。为了使不同模式及不同参数间的模拟结果能相互比较,在不同模型不同参数的模拟时,采取出现顺序固定的蒙地卡罗随机数序列,亦即该数列是符合随机数的随机性,但每次出现数字的顺序是相同的。因此如果以相同的参数来进行两次模拟,将得到完全相同的结果,如此可将随机数对模拟结果带来的变异,减至最小程度。对于较高潜力的区位,一个格子就配予数个蒙地卡罗随机数编号,以使其被选中的机率提高相应的倍数。

依照细胞吸引方式的不同,本研究设计了3种不同的计算机仿真实验。下文将对其加以详细说明。

3.1 相邻关系

在相邻关系的模型中,假设细胞单元只和周围的8个细胞互动,也就是说一个细胞在选择其区位时,该细胞和外围8个细胞的相邻关系是唯一的考虑。详细的仿真规则如下:

步骤一:假设区域内为一均质空间,在初始状态下,区域内每个细胞的发展机率均相同。在区域内尚未有“已发展”细胞的情况下,每个细胞的发展潜力值得分均设为1,发展机率均为40000分之一。

步骤二:若有某一细胞转变为“已发展”,其邻近的8个细胞的发展潜力值会增加到一个特定数值N,本模拟实验中将其称为“聚集强度系数”,如图1所示(填满斜线的方格代表已发展)。另外,若该细胞转变为“已发展”后,其发展潜力值便设定为零,表示该区位在后续阶段被重复选取的机会为零。

步骤三:第一个细胞选取位置时,面对的是全区域均等的发展机会。但当第一个“已发展”细胞发生后,整个区域中发展潜力值便不再是均质的,而是在“已发展”细胞周边具有较高的发展潜力值,因此在下一阶段新加入细胞选择区位时,这些发展潜力值高的区位转变为已发展的机率就会提高,而且发展潜力值的增加将持续累加。亦即当某区位同时位于两个已发展细胞的周边,则其发展潜力值将提高为2N,则此一区位转变为“已发展”的机率将是其他一般区位(发展潜力值为1)的2N倍,并以此类推,如图2所示。因此若某“未发展”的区位被8个“已发展”细胞包围时,其发展潜力值将提高到8N,为发展潜力值的最大可能情况(图2)。

3.2 规模吸引

依照递增报酬模型可知,递增报酬之精神在于报酬率会随着加入该阵营的成员数目而递增。因此当该阵营的规模越大,对新增成员的吸引力越大。所谓“规模吸引”是指该都市对新聚落的吸引力与该聚落的规模成正比。此种区位决策的方式和前面所提的“相邻关系”相比,显然其考虑的范围加大了,由紧邻的细胞数而扩展到紧邻都市的规模。

举例而言,若某区位紧邻一个规模为3的已发展聚落(由3个相邻的已发展细胞构成)时,该区位的发展潜力值将提高为3N,并以此类推,如图3所示。若该聚落的规模为M,则紧邻该聚落区位的发展潜力值将提高为M×N。

依照前述的逻辑,尔后进入区域的细胞,发生在发展潜力值高的区位的机率会提高。而且发展潜力值的高低与该区位紧邻聚落的规模成正比。

3.3 相邻与规模的混合模式

由于考虑到在现实世界中的区位选址,可能同时包括了“相邻”与“规模”两种考虑,也就是说,基于聚集利益,选择居住于大城市,这是一种就“规模”这个因素的思考。而在地区性的区位选择决策时上,人们也会倾向于选择一个有邻居相伴的居住环境,这就是基于“相邻”的考虑。所以设计了一个将“相邻”与“规模”两个因素同时纳入考

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	N	N	N	1	1
1	1	N		N	1	1
1	1	N	N	N	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

图1 “相邻关系”下发展潜力值分布示意图(一)

Fig. 1 Development potential in the Neighboring Attraction Model I

1	1	1	1	1	1	1
1	N	2N	3N	2N	N	1
1	2N				2N	1
1	3N		8N		3N	1
1	2N				2N	1
1	N	2N	3N	2N	N	1
1	1	1	1	1	1	1

图2 “相邻关系”下发展潜力值分布示意图(二)

Fig. 2 Development potential in the Neighboring Attraction Model II

1	1	1	1	1	1	1
1	3N	3N	3N	3N	1	1
1	3N			3N	1	1
1	3N		3N	3N	1	1
1	3N	3N	3N	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

图3 “规模吸引”下发展潜力值分布示意图

Fig. 3 Development potential in the Scale-Attraction Model

虑的模型。

此模型将“相邻”与“规模吸引”同时加以考虑，即在考虑该区位周围紧邻的8个细胞中有多少已发展细胞的同时，也考虑该区位相邻的聚落规模有多大。采用以下公式来计算某区位的发展潜力值 Q 。

$$Q = J \times \sqrt{M \times N}$$

式中： Q 为某区位的发展潜力值； J 为聚集强度系数； M 为该细胞周围8个细胞的已发展细胞数； N 为该细胞周围紧邻的最大聚落规模。 $\sqrt{M \times N}$ 为“相邻”与“规模吸引”两股力量的几何平均数。

以上3种模式，通过发展潜力值来体现区位选择的机率。发展潜力越高，新增住宅单位选择该区位的机率也越高。这种区位优势可以不断累积，如滚雪球般，体现了递增报酬的原理。

4 模拟结果分析

模拟结果如图4-9所示，由于计算机仿真实验运用不同模式与参数反复实验多次，得

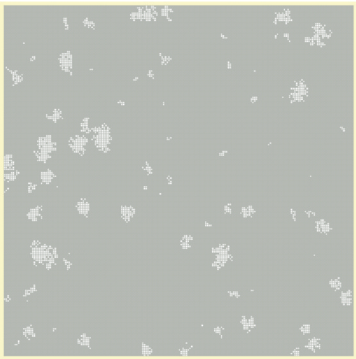


图4 相邻关系、聚集强度系数为500时，第2000回合的结果
Fig. 4 Result in the 2000th round (Neighboring Attraction Model, Agglomeration Intensity = 500)

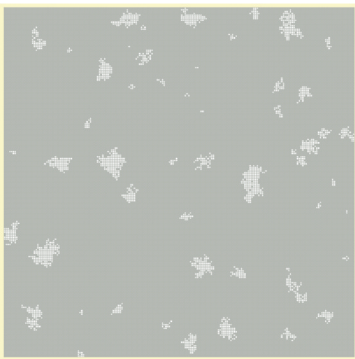


图5 相邻关系、聚集强度系数为1000时，第2000回合的结果
Fig. 5 Result in the 2000th round (Neighboring Attraction Model, Agglomeration Intensity = 1000)

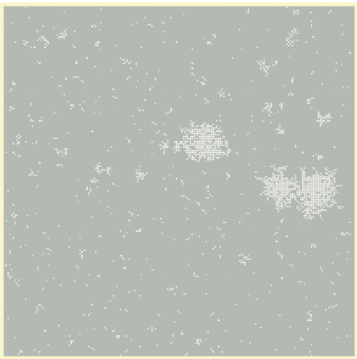


图6 规模吸引、聚集强度系数为5时，第2000回合的结果
Fig. 6 Result in the 2000th round (Scale-Attraction Model, Agglomeration Intensity = 5)

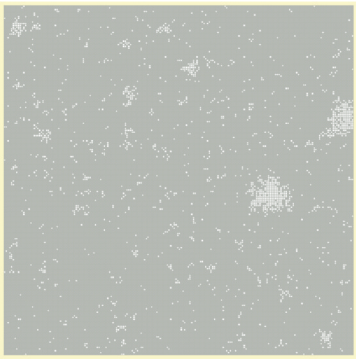


图7 规模吸引、聚集强度系数为10时，第2000回合的结果
Fig. 7 Result in the 2000th round (Scale-Attraction Model, Agglomeration Intensity = 10)

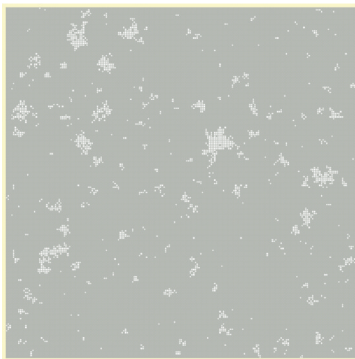


图8 混合模式、聚集强度系数为40时，第2000回合的结果
Fig. 8 Result in the 2000th round (Mixed Model, Agglomeration Intensity = 40)

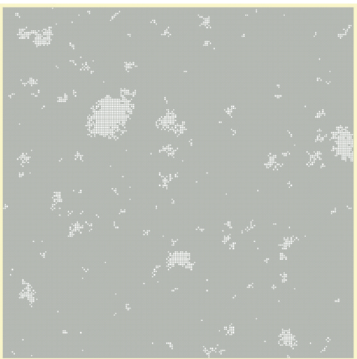


图9 混合模式、聚集强度系数为70时，第2000回合的结果
Fig. 9 Result in the 2000th round (Mixed Model, Agglomeration Intensity = 70)

于篇幅，仅能选择数个具有代表性的实验结果加以展现。图中显示聚落空间结构(灰色代表未发展，白色代表已发展)。

为了观察仿真结果中，聚落规模排序与聚落规模间是否合乎幂次定律模式，将“排序”与“规模”分别取对数，以“排序”为因变量(Y)，“规模”为自变量(X)，进行简单线性回归分析，以相关统计数据来验证所形成的聚落分布是否呈现自我组织临界性的幂次分布特性。在此要加以说明的是，3种不同模式的聚集强度系数的分布范围颇有差异，从1到5000不等，是为了配合不同模式的特性，以便能产生具有代表性的结果所做的安排。如果3个模型要求使用同样的参数序列，则无法使每个模型都产生出具代表性的结果。“相邻关系”、“规模吸引”与“混合模式”的模拟结果分别如表1、表2和表3所示。

4.1 3种模式异同之比较

- (1) 在3种模式当中，随着聚集强度的增加，其首要都市规模及平均聚落规模均有逐渐扩大之趋势，表示当我们如果对相邻现有聚落之区位给予较高的发展潜力值时，确实会强化住户集中的趋势，从而产生较大规模的聚落以及较少的聚落数目。但此一趋势并非每次都必然成立，亦即并非聚集强度提高，首位市规模就必然增大。因为这是一个机率性的模型，会受到随机变量的干扰，当机率较低的情况连续出现时，便会对后续的发展造成非预期的影响，从而影响模拟结果。另外，当两聚落合并时造成的聚落规模暴增，也会影响模拟之结果。
- (2) 当聚集强度提高时，在3种模式中都呈现回归方程式中斜率趋缓的趋势。回归方程式的斜率，代表的是不同规模间其城市排行的平均差距，因此斜率趋缓代表一种“极化”的现象，即都市发展集中于少数的大城市，大小城市间的差距扩大。斜率随着聚集强度提高而减少的趋势，代表当我们如果对相邻现有聚落之区位给与较高的发展潜力值时，确实会强化住户集中的趋势，而且此种集中趋势和发展潜力值提高的幅度成正比。
- (3) 通过R²来检验聚落发展是否符合幂次定律，可以发现，在3种模式的不同参数设定的情况下，其R²值分布于0.83至0.99间，表示3种模式都较能产生符合幂次定律的聚落分布形态。但在不同模式间却有显着差异存在，“相邻关系”模式下的R²值显然比“规模
- 表1 “相邻关系”模式系数表

Tab. 1 Indices for the Neighboring Attraction Model

聚集强度	首位市规模	R ²	斜率	聚落规模 平均数	聚落规模 标准差	聚落规模 变异系数
50	34	0.8893	-1.4378	6.35	6.45	1.0473
100	84	0.9257	-1.2087	9.08	11.21	1.2337
200	105	0.8645	-0.9360	15.72	18.21	1.1582
500	138	0.8718	-0.7632	25.82	29.85	1.1560
1000	164	0.8589	-0.6432	38.42	39.03	1.0158
2000	262	0.8251	-0.4650	74.04	78.67	1.0626
5000	348	0.8254	-0.4702	90.91	89.06	0.9797
- 表2 “规模吸引”模式系数表

Tab. 2 Indices for the Scale-Attraction Model

聚集强度	首位市规模	R ²	斜率	聚落规模 平均数	聚落规模 标准差	聚落规模 变异系数
1	12	0.9937	-2.1485	1.25	0.78	0.6254
2	164	0.9569	-1.2622	1.69	4.99	2.9554
3	174	0.9953	-1.0732	2.12	7.12	3.3550
5	286	0.9841	-0.9645	2.80	13.39	4.7873
7	720	0.9677	-0.8921	3.53	30.52	8.6546
10	651	0.9488	-0.7890	4.69	36.33	7.7492
20	1235	0.9607	-0.7202	7.34	74.82	10.1908
- 表3 “相邻与规模混合”模式系数表

Tab. 3 Indices for the Mixed-Relation Model of Neighboring Attraction and Scale-Attraction

聚集强度	首位市规模	R ²	斜率	聚落规模 平均数	聚落规模 标准差	聚落规模 变异系数
10	31	0.9546	-1.6155	3.17	3.86	1.2789
20	88	0.9598	-1.1812	4.65	8.84	1.9001
40	172	0.9710	-0.9920	7.32	16.96	2.3170
50	238	0.9724	-0.8781	9.85	25.13	2.5516
70	448	0.9863	-0.8400	11.82	39.61	3.3520
100	812	0.9280	-0.7814	15.91	72.86	4.5789
500	994	0.9801	-0.4781	55.53	190.39	3.4287

吸引”与“混合模式”模式要低，在统计检定^①时，可以证实，“相邻关系”与其他两者达到显著差异，但后两者则无法证实有差异存在（以5%显著水平检定）。由于“规模吸引”与“混合模式”的 R^2 值均在0.9以上，所以可以认定，规模效应是形成聚落体系的原因之一，而这正是递增报酬的基本精神。因此，我们推测，递增报酬效应确实会产生符合幂次定律的聚落体系。

（4）从聚落规模的“变异系数”（聚落规模的平均数除以聚落规模的标准差）来观察，变异系数代表的是群落分布状态是否均布的指标。在3组模式中，其变异系数由大到小，分别是“规模吸引”、“混合模式”与“相邻关系”。亦即“规模吸引”模式所造成聚落体系的变异最大，而“相邻关系”模式所造成聚落体系的变异最平均。究其原因，在“规模吸引”模式下，聚落对新住户的吸引与聚落规模成正比，因此“大者恒大”，差距迅速拉开。而“相邻关系”模式中，吸引力的差距至多为8倍，因此产生的聚落其规模的差异较平均。

4.2 不同时间的比较

如表4所示，从时间序列来观察，将3种模式由第500回合到第2000回合，观察回归方程式斜率与 R^2 值的变化，可以得到以下结论：

- （1）在各模式下， R^2 值并不因时间推移而产生线性变化。可以这样解释，这显示幂次定律存在的普遍性与稳定性，不管在任何时间点的聚落分布都符合此一特性，而非以“逐渐趋近”的方式来达到幂次定律的分布形态。
- （2）在“规模吸引”的模式中，斜率的绝对值随时间增加而减小，但在“相邻关系”与“混合模式”的斜率在各时期几乎相同。

在“相邻关系”中，新住户是否被聚落所吸引，取决于细胞间的相邻关系，所以规模不同的聚落如果其周边地区的相邻关系的形态相同，其对新住户的吸引力便是相同的，吸引力并不直接受聚落规模的影响。而且相邻关系所产生吸引力的最大差距仅为8倍，因此大小聚落是呈“同步”成长的状况，因此大小聚落的间的差距亦维持一稳定的关系，聚落间的差距并不随时间推移而扩大。

而在“规模吸引”模式中，各聚落对新住户的吸引力则与规模成正比。因此会产生“大者恒大”的加速发展现象，因此大小聚落的差距会随着时间的拉开，差距越来越大，表现于回归模型中就是斜率随时间增加而减少。在“混合模式”中，由于规模的吸引力被相邻关系的吸引力牵制，因此并未呈现聚落间差距随时间明显扩大的现象。

4.3 首位市成长速度比较

从首要都市的成长速度来比较，以后半阶段的成长速度而言，全区域的规模由1000单元增加至2000单元，增加幅度为2倍，但在不同模式间，成长倍数却从不足两倍到接近10倍而出现较大差距。其中以“规模吸引”模式首位市成长速度最快，“相邻关系”

表4 不同时间系数比较表
Tab. 4 Change of parameters at different rounds of simulation

吸引方式	回合数	首位市规模	R ²	斜率
相邻关系 (聚集强度: 500)	300	29	0.9010	-0.9515
	500	45	0.9113	-0.9331
	700	57	0.9139	-0.8838
	1000	73	0.8919	-0.8287
	1200	83	0.8847	-0.8125
	1500	105	0.8751	0.7949
	2000	138	0.8718	-0.7632
规模吸引 (聚集强度: 5)	300	4	0.9916	-2.4704
	500	5	0.9518	-2.4039
	700	9	0.9789	-2.0510
	1000	29	0.9962	-1.5166
	1200	46	0.9932	-1.3912
	1500	105	0.9940	-1.4216
	2000	286	0.9841	-0.9645
混合模式 (聚集强度: 40)	300	10	0.9744	-1.5426
	500	20	0.9640	-1.5069
	700	43	0.9673	-1.3670
	1000	37	0.9766	-1.2079
	1200	87	0.9759	-1.1270
	1500	111	0.9732	-1.0777
	2000	172	0.9710	-0.9920

模式首位市成长速度相对最慢,甚至低于全体的平均成长速度(全体的增加幅度为2倍)。值得注意的是,当设定一个较大的聚集强度时,“相邻关系”中会很快的集结出一些小规模的聚落,以相近的速度慢慢成长。而“规模吸引”模式则在初期的时候,成长非常缓慢,但当聚落达到一定规模后,规模效应发生作用,成长速度便开始“爆发”,而大小聚落间的差距也迅速扩大。而“混合模式”的成长速度则介于两者之间。

这种现象也印证了前文所述,即在“相邻关系”下,大小聚落是“同步”成长;而在“规模吸引”模式中,则是大聚落的成长速度远高于小聚落,因此聚落间的规模差距会随着时间的推移而扩大。

另外有一点值得注意,在现实状况中,一个地区内,首要都市的成长速度一定是高于全体的平均值,而在“相邻关系”中首位市的成长速度竟然低于全体成长速度的平均值,这显然与现实状况不符。由此可见,“规模吸引”与“混合模式”两者较能符合真实世界的聚落成长模式(表5)。

表 5 首位市成长速度比较表

Tab. 5 Growth of the primary city in three models						
吸引方式	相邻关系		规模吸引		混合模式	
聚集强度	500	1000	5	10	40	70
第100回合	13	24	2	2	3	14
第500回合	45	63	5	11	20	66
第1000回合	73	115	29	80	73	186
第1500回合	105	137	105	319	111	295
第2000回合	138	164	286	651	172	448
后半阶段成长倍数	1.89	1.43	9.86	8.14	2.36	2.41

5 数理仿真演算

根据上述相邻关系的增长逻辑,设计一种九宫格的二维平面空间模型来模拟都市聚落的成长。模型主要描述不同规模等级的聚落体系与其出现频率(次数)间的关系,通过一个随机成长过程(新增住户或厂商随机挑选区位)产生不同规模等级的聚落,其出现频率则通过对其发生率期望值(expectation)的计算。当每一个新分子(住户或厂商)进入某块区域时,这些机率值便提供了可选择的区块的“信息”,在过程中,人们可以选择接近或远离其他已发展区块。于是从 t 、 $t+1$ 、 $t+2$ 、到 $t+n$ 时间的演进过程中,产生不同的发展路径。

如图10所示,从最初始状态 t_0 时(区块皆处于未发展状态)有9个区块可供选择发展,此时共有9种可能的发展情形,当其中一种情形发生后,接着下一个时间点 t_1 在空间上尚有8个区块可选择,此时发展成 9×8 种路径,以此类推。整个九宫格模型发展至所有区块都为已开发的演进时间内的所有可能情形,最多会产生362,880种路径($9 \times 8 \times 7 \cdots \times 2 \times 1$,即 $P(9,9)$),而路径中每个空间形态组合均会发生若干

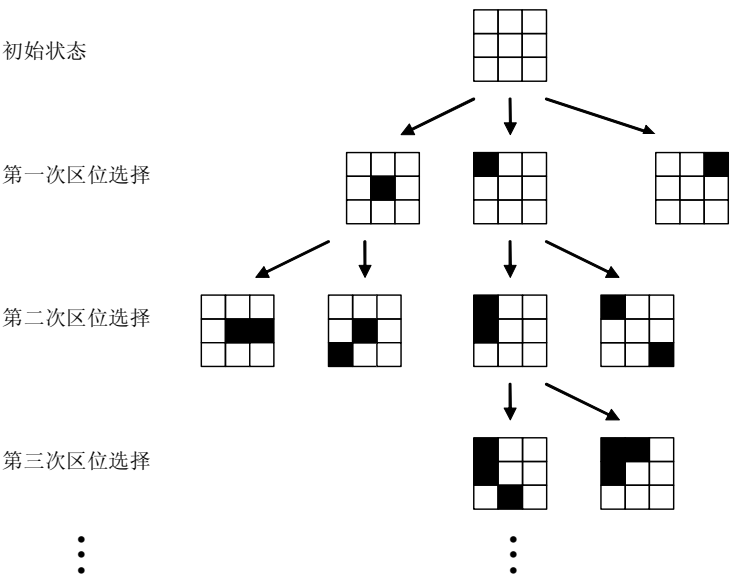


图 10 九宫格模型中随机成长的路径

Fig. 10 Stochastic paths of growth in the 9-Cell Lattice Model

大小不一的规模等级聚落。此外，该模型是一个有限空间的成长过程，当中的任一个特定的区块，将会在下一个时间点被选择的机率，是依照先前已经被选择过的区块而决定，于是形成路径相依的发展序列。

5.1 幂次系数值与显著性分析

如前文所述，都市发展的幂次法则通常是指都市规模与其都市排序取对数后会呈现线性关系，由于九宫格的规模样本过小，本数理仿真演算中改将“出现次数(频率)”与“规模”分别取对数，以“出现次数”作为因变量(Y)，“规模”作为自变量(X)，进行相关的统计分析，并纳入不同时间向度的变化，以检视其回归系数(斜率)与判断系数(R^2)的变化；回归相关检证数据则整理于表6中。

表6 模型回归系数与相关系数之相关检验表
Tab. 6 Coefficients and R Squares in the regression model

时间序列	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 8	n = 9
回归系数 (斜率)	-1.6501	-1.2276	-1.0116	-0.8653	-0.7247	-0.6198	-0.5421
判断系数 (调整的 R^2)	0.99998	0.97477	0.95282	0.90113	0.77732	0.68058	0.61004

其中，每一等级规模的区块发生的机率都是根据图1的聚集强度计算方式，将该区块发生的聚集强度除以所有细胞聚集强度的总和。接着计算该等级规模区块发生的期望值，亦即将前项所计算出来的机率加总。时间向度则系指其考虑的时间范围大小，如当模型由初始状态 t_0 出发，演进至 t_3 (亦即人口区块已增加3次)，此时可能会产生的聚落规模最大值为3(全部相邻)，最小则为1(各自独立)，将模型演进的这段时间范围内形成各不同规模等级聚落(1至3)的机率期望值汇总，便可获得该原始数值，尔后时间点的运算则以此类推。当考虑母体的时间范围越大时，除了会有出现规模更大的聚落的可能性，也会产生越分歧的路径，其样本数也越大。此外，表6中的判断系数(R^2)是作为判断其是否符合幂次法则特性之标准。该值越大则表示都市发展越高度地呈现幂次法则现象，反之则代表幂次法则的特性不显着。

由表6可观察出随着时间范围的增加，回归系数(斜率值)的变化情形有渐趋缓和的趋势，即其回归系数绝对值随着时间变化而递减。此现象反映出都市发展过程似朝向“极化”的趋势发展，也就是说，随着时间的推演，都市发展会越集中发生于较少数的大都市聚落中，且当发展多集中于形成大都市聚落时，则会使得大都市的规模扩张速度更快，并产生较少的聚落数目，导致大小都市聚落规模间的差距越加扩大。演算结果的判断系数(代表幂次法则特性的显着性)多在0.9以上，在演算后期判断系数值大幅衰减到0.7以下。这可能是由于发展空间有限所导致的。在发展后期随着空间逐渐被开发填满后，整体区域会合并形成一个大型聚落，此时区域内不同规模都市聚落将不复存在。因此，在模型的后期描述幂次现象之判断系数值较为不显着。此发现与前述计算机仿真结果类似。

5.2 与无递增报酬演算的比较

为了比较当聚集利益值 不同时机率的分布是否会发生改变，本研究还尝试以“无递增报酬”机制的假设作为对照组加以检验，观察模型在递增报酬与纯粹随机成长两种状态下对幂次系数值之影响。所谓的“无递增报酬”机制，便是将模型假设增加的聚集利益值N设为0，使其呈现随机成长的特征，即每一个新进入的分子对于区块的选择为纯机率性的行为，都市聚落的形成与否，完全视空间中的区位而决定。其结果可见于表7。

由表7可以观察到，在“无递增报酬”状态下，其回归分析结果仍符合幂次法则现象(且判断系数多为显着)，但其所得到的回归系数值要小于存在递增报酬时的值。换言之，无递增报酬状态时的都市发展中，都市聚落的形成相较于递增报酬存在时要更为分散。由统计分析数据上来看，当模型演化到后期时，受到空间的限制，会使得幂次定律特性呈现不显著，若仅考虑两种类型模型在显着性达0.9以上时的时间范围做比较，可以观察到当

都市发展缺乏聚集驱动力的推动时，虽然其结果大致上仍符合幂次法则，但其都市阶层体系之分布形态与真实世界情形有较大的差距，较难以产生如真实世界高度集中的都市发展情形。

另外，存在递增报酬的模型中，其回归系数值接近-1，且有明显的聚集与极化趋势，与真实的都市聚落状况十分类似。由此我们推测，递增报酬机制的存在很有可能是都市幂次定律现象的成因之一。

6 讨论

美国的实证数据显示，都市体系的分布与幂次法则相当吻合，而且在过去一个世纪以来并无太大改变，回归模型的斜率值一直为-1左右^[8]。而在本研究的计算机仿真实验中，不同的“聚集强度系数”参数值会产生不同的斜率，而“规模吸引”与“混合模式”两者，其斜率值范围中均接近-1，而且R²均在0.95以上，表示模拟的结果的确与真实世界相近。例如，我们可以看到在“规模吸引”模式中，当“聚集强度系数”设定为5时，其相对应的斜率值为-0.9645（结果见图6），而在“混合模式”中，当“聚集强度系数”设定为40时，其相对应的斜率值为-0.9920（结果见图8）。也就是说，在模拟实验中许多的聚落分布形态其实都符合幂次法则，但是只有在特定参数设定下，才会得到与实证数据相同的斜率值。这可能代表了在真实世界中，聚集所带来的效益及影响大致是固定的，它不会低到使聚落形态变成只有一群规模相近的小聚落，也不会高到使所有的住户集中在一个超大型首位市，在某一个适当的参数值之下，我们会得到一个最接近真实世界的模拟结果。而且实证数据也显示在过去一个世纪以来，斜率几乎没有改变过，因此在某种程度上我们可以说，产生与真实世界相同斜率的模拟结果，是一个“最佳”的模拟结果，因为它最能反映真实世界的状况。

为了解模型与真实世界的差距，本研究将模型结果以及台湾7大都市和浙江省10大都市的等级分布结果整理如表8。其中等级大小法则是以首位市规模为100来假设，台湾都市的资料则是以台湾地区省辖市以上的7大都市（台北市、高雄市、台中市、台南市、基隆市、新竹市、嘉义市）来做统计^[11]。浙江省的资料则是以《浙江省城乡建设用地规模和优化布局研究》中的《2004年浙江省城镇人口与城镇建设用地区一览表》数据来统计^[12]，前10大都市包括杭州、温州、宁波、义乌、瑞安、台州、绍兴、湖州、金华和嘉兴的中心城区。从表8来看，台湾地区7大都市的回归结果，其斜率值为-0.8111，与-1略有差距。此差距可能由于样本数过小所造成；而浙江省10大都市的回归结果，斜率值为-1.0960，基

表7 有、无递增报酬假设之模型相关数据比较
Tab. 7 Models with and without the consideration of increasing returns

时间范围	含递增报酬状态下		无递增报酬状态下	
	回归系数	判断系数	回归系数	判断系数
n = 3	-1.65011	0.999976	-2.30206	0.995191
n = 4	-1.22763	0.974766	-1.94798	0.988797
n = 5	-1.0116	0.952817	-1.95853	0.994604
n = 6	-0.8653	0.901126	-1.26534	0.950884
n = 7	-0.72466	0.777319	-1.02343	0.790182
n = 8	-0.61981	0.680579	-0.85451	0.657108
n = 9	-0.5421	0.61004	-0.73247	0.564107

表8 模型比较表

Tab. 8 Comparison of the models and the real urban settlement systems

模式名称	前十大聚落规模										R ²	斜率
等级大小法则	100	50	33	25	20	17	14	13	11	10	1.0000	-1.0000
台湾七大都市	2641	1475	940	728	385	361	265	-	-	-	0.9836	-0.8111
浙江省十大都市	2647	1951	1556	694	615	612	607	523	520	402	0.9280	-1.0960
规模吸引 (系数 5)	286	195	48	45	37	35	32	23	17	16	0.9841	-0.9645
混合模式 (系数 40)	172	111	99	87	68	62	61	53	51	45	0.9710	-0.9920

备注：都市规模单位为千人。台湾数据取自《都市及区域发展统计汇编》，为 2002 年的数据；浙江省数据取自《浙江省城乡建设用地规模和优化布局研究》，为 2004 年的数据。

本体现了都市的等级大小法则分布。

要判断“规模吸引”与“混合模式”中哪一个是“最佳”模型，可以从两方面来看。从对模型的解释能力而言，两者并无显著差异；从统计上而言，既然无法提高解释能力，则应以较为简化的模型为优，因此“规模吸引”模式应是较佳的模式。然而，由前述不同时间的比较而言，“规模吸引”模式的斜率显然是随时间而在改变，这点则与美国都市实证数据显示过去 1 世纪来斜率稳定于-1 附近是不符的。当然，只凭过去一个世纪的数据要推断斜率是否不随时间而改变仍嫌武断，但至少在一段期间内斜率是呈现稳定的。由这一点来看，则“混合模式”的斜率表现显然较为稳定，在表 4 中，从 1500 回合到 2000 回合的 500 回合当中，斜率几乎是相同的，因此若以接近真实世界为标准，则“混合模式”应为最佳模式。这表明，真实世界中的区位选择可能同时有地区性与规模性两项考虑因素。

此外，虽然本文的计算机及数理仿真是在假设地形为均质平原的基础上进行的，当其它地形或基础设施变化，例如交通网络被考虑在内时，所得到的结果也应类似。因此，笔者推测，地形变化并不会影响都市聚落幂次法则分布的特性，但它们会改变都市聚落区位的分布。

7 结论

幂次法则是一个普遍存在于自然科学与社会科学界的现象，也存在于实际的都市体系中。为了验证幂次法则与递增报酬的关联性，在本研究中，通过计算机及数理仿真实验，以随机成长模型来仿真都市聚落体系形成的过程。基于递增报酬的原则，该仿真包含了 3 种不同的区位发展吸引模式，分别为相邻关系（区位选择只受到邻近 8 个邻居的影响）、规模吸引（聚落规模越大，对新住户的吸引力越强）以及同时考虑规模与相邻的混合模式。由仿真实验来观察，3 种模式（相邻关系、规模吸引、混合模式）都能产生符合幂次法则的聚落体系。由模拟结果的 R^2 检验来看，依照递增报酬原则所产生的聚落体系确实与幂次法则呈高度吻合，此结果也已由数理仿真证实。

由 3 种模式的比较而言，从 R^2 检验及首位市成长速度而言，单纯的相邻关系在模式的配合度上较差，与真实世界的状态亦有相当差距。而规模吸引与混合模式两者的拟合优度较高，具有更佳的解释能力，由模型的解释的贡献度而言，“规模”显然比“相邻关系”更为重要，是最重要的解释因子。而“规模”这个区位解释因子正充分反映了“递增报酬”的精神。由模拟结果，我们推测，递增报酬确实会产生符合幂次法则的聚落体系，因此递增报酬有可能是形成真实世界幂次法则现象的推动机制。根据数理仿真的结果，本研究亦推测：幂次法则的发生可能是一种统计上观察到的现象，其发生并不会受到都市经济等因素的影响，而经济因素、或者其他的因素，则是会产生并表现于对幂次系数值变化的影响。

在 Arthur 等对递增报酬的研究中，对于空间分布的探讨也略有探讨，并以数学模型来表示递增报酬对聚集利益的影响^[13]。因此，既然本研究通过计算机和数理仿真，证实了递增报酬与幂次法则确实有高度相关，能否进一步对 Arthur 的数学模型加以延伸，从理论上建立起两者的关系，将是后续研究的一个重要方向。此外，本模型在分析过程中，设立了一些简化问题的前提假设。在后续的研究中可以尝试将这些限制条件解除，如考虑迁移行为和平面的非均质因素等等，以使研究能够更接近真实世界的状况。

参考文献 (References)

[1] Batty M. Rank clock. *Nature*, 2006, 444: 592-596.
[2] Zipf G K. *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. New York: Addison-Wesley Press, 1949.

- [3] Gibaix X. Zipf's Law for cities: An explanation. *Quarterly Journal of Economics*, 1999, 14(3): 739-767.
- [4] Chen Hsin-Ping. Zipf's Law and the spatial interaction models//*Proceedings of Annual Meeting for Regional Science Association*, A1-III-1-30, Taipei, 2000.
- [5] Bak P, Chen K. Self-organization criticality phenomenon. *Journal of Geophysical Studies*, 1989, 94: 15635-15637.
- [6] Bak P. Self-organizing criticality. *Scientific American*, 1991, (1): 26-33.
- [7] Simon H A. On a class of Skew Distribution Function. *Biometrika*, 1955, 52: 425-440.
- [8] Krugman P. *The Self-organizing Economy*. Cambridge, Massachusetts: Blackwell Publishers Inc., 1996.
- [9] Arthur W B. *Increasing Returns and Path Dependence in the Economy*. Ann Arbor, Michigan: The University of Michigan Press, 1990.
- [10] Arthur W B. Silicon Valley's vocational clusters: When do increasing returns imply monopoly? *Mathematical Social Sciences*, 1990, (19): 235-251.
- [11] 王振玉. 都市及区域发展统计汇编. 台北: 行政院经济建设委员会都市及住宅发展处, 2003. [Wang Zhen-Yu. Collections of Statistical Data for Urban and Regional Development, Taipei: City and Housing Development Division, Economic Construction Commission, The Executive Council, 2003.]
- [12] 邵波, 潘强. 浙江省城乡建设用地规模和优化布局研究. 杭州: 浙江大学出版社, 2006. [Shao Bo, Pan Qiang. Urban and Rural Construction Land Area and the Improvement of Its Spatial Distribution in Zhejiang Province. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2006.]
- [13] Arthur W B, Ermoliev Y M, Kaniovski Y M. Path-dependent processes and the emergence of macro-structure. *European Journal of Operational Research*, 1987, 30: 294-303.

The Formation of Urban Settlement Systems: Computer Experiments and Mathematical Proofs of the Increasing Returns Approach to Power Law

LAI Shih Kung^{1,2}, HAN Haoying¹, YU Ju Ling³, KO Po Chien⁴

(1. *Institution of Land Science and Property Management, Zhejiang University, Hangzhou 310029, China;*

2. *Department of Real Estate and Built Environment, National Taipei University, Taipei, China;*

3. *Department of Real Estate Management, Kun Shan University of Technology, Tainan, China;*

4. *Graduate Institute of Urban Planning, National Taipei University, Taipei, China)*

Abstract: The power law is a phenomenon that can be widely observed in both natural and social environments, and is evident in the urban settlement systems. Previous studies successfully observed and identified the power law phenomenon, but have not given a complete explanation about how the power law forms. Viewing cities as complex systems, this research attempts to explore why power law emerges from the increasing-returns to urban scale in the complexity theory by designing and implementing computer experiments based on the Microsoft Visual Basic software to simulate the growth of urban settlements and observing the relationship between increasing returns and power law. Three basic patterns of urban growth are simulated in this research: neighborhood attraction, scale attraction, and mixed attraction. The results of the computer experiments suggest that (1) the scale-attraction and mixed-attraction patterns explain better the growth of urban settlements than the neighborhood-attraction pattern; and (2) a close relationship exists between the emergent power law phenomenon and the urban systems that are formed through the three simulation patterns under the increasing returns assumption. In addition, the mathematical simulation implies that power law is a universal phenomenon in statistics, and the formation of urban settlement systems is driven by economic factors, such as increasing returns. Therefore, we argue that increasing returns would be one of the underlying mechanisms through which the power law phenomenon emerges in the real world.

Key words: computer experiment; power law; increasing returns